Unidad VI: Solución de ecuaciones diferenciales
6.1 Métodos de un paso

MÉTODO NUMÉRICO

UNIDAD 6

Los métodos de Euler.

Una de las técnicas más simples para aproximar soluciones de ecuaciones diferenciales es conocida como Método de Euler o método de las tangentes. Supongamos que queremos aproximar la solución del problema de valores iniciales y ’ = f(x, y) para el cual y(x0) = y0. Si h es un incremento positivo sobre el eje x, entonces, como se muestra en la figura, podemos encontrar un punto Q(x1, y1) = (x0 + h, y1) sobre la tangente en P (x0, yo) a la curva solución desconocida.

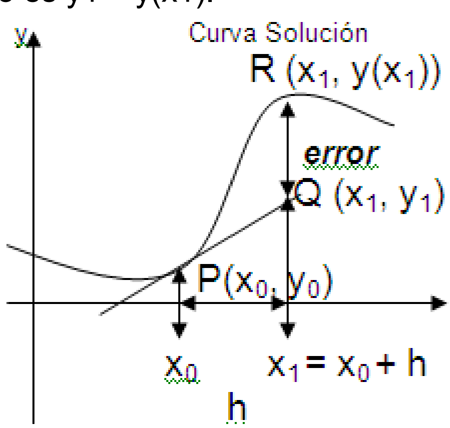
De la ecuación de una recta que pasa por un punto dado, tenemos:

$$\frac{y_1 - y_0}{(x_0 + h) - x_0} = y_0' \quad ; \qquad \frac{y_1 - y_0}{h} = y_0'$$

o bien $y_1 = y_0 + hy_0'$

en donde $y_0' = f(x_0, y_0)$

Si denotamos x0 + h por x1, entonces el punto Q(x1, y1) ubicado sobre la tangente es una aproximación del punto R(x1, y(x1)) que se encuentra sobre la curva solución. Esto es y1 ≈ y(x1).



Por supuesto, la exactitud de la aproximación depende mucho del tamaño del incremento h. Usualmente debemos elegir el tamaño de esta medida de modo que sea “razonablemente pequeña.

Suponiendo que h tiene un valor uniforme (constante), podemos obtener una sucesión de puntos (x1,y1), (x2, y2), . . ., (xn, yn), que sean aproximaciones de los puntos (x1,y(x1)), (x2,y(x2)), . . ., (xn, y(xn)).

Ahora bien, usando el valor de y2 que es la ordenada de un punto sobre una nueva “tangente”, tenemos:

$\frac{y_2 - y_1}{h} = y_1$; o bien $y_2 = y_1 + hy'_1$ es decir $y_2 = y_1 + h\, f(x_1, y_1)$

En general se tiene que:

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n$$

$$y_{n+1} = y_n + h\, f(x_n, y_n)$$

En donde xn = x0 + nh.

El método de Euler mejorado o fórmula de Heun.

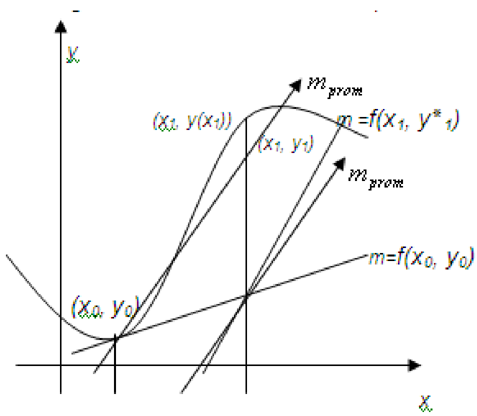
La fórmula $$y_{n+1} = y_n + h\frac{f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y*_{n+1})}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (A)$$

donde $$y*_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

se conoce como Fórmula de Euler mejorada o Fórmula de Heun.

Los valores de f(xn, yn) y f(xn+1, y*n+1) son aproximaciones de la pendiente de la curva en (xn, y(xn)) y (xn+1,y(xn+1)) y en consecuencia el cociente $\dfrac{f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y*_{n+1})}{2}$ puede ser interpretado como una pendiente promedio en el intervalo entre xn, xn+1. Las ecuaciones de (A) se pueden visualizar fácilmente.

En la figura se muestra el caso en que n = 0.



$$m_{prom} = \frac{f(x_0, y_0) + f(x_1, y*_1)}{2}$$

Observe que f(x0, y0) y f(x1, y*1) son las pendientes de las rectas indicadas que pasan por los puntos (x0, y0) y (x1, y*1), respectivamente.

Tomando un promedio de estas pendientes obtenemos la pendiente de las rectas oblicuas (flechas).

En lugar de seguir la recta de pendiente m = f(x0, y0) hasta el punto de ordenada y*1 obtenida por el método de Euler usual, seguimos la recta por (x0, y0) con pendiente mprom hasta llegar a x1.

Examinando la figura, es plausible admitir que y1 es una mejora de y*1.

Además podríamos decir que el valor de $y*_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$ predice un valor de y(x1), mientras que:

$y_1 = y_0 + h\dfrac{f(x_0, y_0) + f(x_1, y*_1)}{2}$, corrige esta estimación.

Métodos de Runge-Kutta

Se trata de una familia de métodos en lugar de calcular derivadas de orden superior, se evalúa la función en un mayor número de puntos, tratando de igualar la precisión del método de la serie de Taylor.

Métodos de Runge-Kutta de segundo orden

$$y_{i+1} = y_i + (a_1 k_1 + a_2 k_2)h$$

con:

$$k_1 = f(x, y) \qquad k_2 = f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h)$$

donde las cuatro constantes desconocidas satisfacen:

$$a_1 + a_2 = 1 \qquad a_2 p_1 = \frac{1}{2} \qquad a_2 q_{11} = \frac{1}{2}$$

Métodos de Runge-Kutta de tercer orden.

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)h$$

donde:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i) \\ k_2 &= f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h) \\ k_3 &= f(x_i + h, y_i - k_1 h + 2k_2 h) \end{aligned}$$

Métodos de Runge-Kutta de cuarto orden.

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h$$

donde:

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(x_i, y_i) \\
k_2 &= f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h) \\
k_3 &= f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2 h) \\
k_4 &= f(x_i + h, y_i + k_3 h)
\end{aligned}$$

Método de Runge-Kutta de quinto orden de Butcher.

6.2 Método de pasos múltiples

Se considera el problema de valores iniciales (P.V.I.) 8<: y0(x) = f(x; y(x)); x 2 [a; b]; y(a) = y0 dado, el que supondremos tiene solución única, y : [a; b]

Dada una partición del intervalo [a; b]: a = x0 < x1 < < xN = b; los métodos que hemos visto hasta aquí sólo usan la información del valor yi de la solución calculada en xi para obtener yi+1. Por eso se denominan métodos de paso simple.

Parece razonable pensar que también podrían utilizarse los valores yi.

Para ello, si integramos y0(x) = f(x; y(x)) en el intervalo [xi; xi+1], se tiene: Z xi+1 xi y0(x) dx = Z xi+1 xi f(x; y(x)).

Los métodos de un paso descritos en las secciones anteriores utilizan información en un solo punto xi para predecir un valor de la variable dependiente yi+1 en un punto futuro xi+1. Procedimientos alternativos, llamados métodos multipaso, se basan en el conocimiento de que una vez empezado el cálculo, se tiene información valiosa de los puntos anteriores y esta a nuestra disposición. La curvatura de las líneas que conectan esos valores previos proporciona información con respecto a la trayectoria de la solución. Los métodos multipaso que exploraremos aprovechan esta información para resolver las EDO. Antes de describir las versiones de orden superior, presentaremos un método simple de segundo orden que sirve para demostrar las características generales de los procedimientos multipaso.

6.3 Sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias

Un sistema de ecuaciones diferenciales es un conjunto de varias ecuaciones diferenciales con varias funciones incógnitas y un conjunto de condiciones de contorno. Una solución del mismo es un conjunto de funciones diferenciables que satisfacen todas y cada una de las ecuaciones del sistema. Según el tipo de ecuaciones diferenciales puede tenerse un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias o un sistema de ecuaciones en derivadas parciales.

En un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de cualquier orden, puede ser reducido a un sistema equivalente de primer orden, si se introducen nuevas variables y ecuaciones. Por esa razón en este artículo sólo se consideran sistemas de ecuaciones de primer orden.

6.4 Aplicaciones